2024

MATHEMATICS — MINOR

Paper : MN-1

(Calculus, Geometry and Vector Analysis)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

বিভাগ - ক

[Calculus]

(Marks : 20)

১। ***যে-কোনো চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৪

(ক) মান নির্ণয় করো ঃ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$ ।

(খ) $\dfrac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় করো, যখন $x = a\cos^3 t$ এবং $y = b\sin^3 t$।

(গ) $f(x) = (k^2 - 5k + 18)x + x^3 + 6x^2$ একটি ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক হলে 'k' এর মান নির্ণয় করো।

(ঘ) $y = (\sin^{-1}x)^2$ হলে দেখাও যে $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$।

(ঙ) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$-এই Reduction formula ব্যবহার করে $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx$-এর মান নির্ণয় করো।

(চ) $t \in [0, \pi]$ অন্তরালে, $x = \cos 3t$, $y = \sin 3t$ বক্ররেখাটির পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(ছ) $x^2 = 36y$ অধিবৃত্ত, Y-অক্ষ এবং $y = 4$ সরলরেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের প্রথম পাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

২। ***যে-কোনো তিনটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৪×৩

(ক) a এবং b-এর মান নির্ণয় করো যখন $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin 2x - b\sin x}{x^3} = 1$ ।

(খ) $\dfrac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় করো, যখন $\tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \log(x^2 + y^2)$ ।

(গ) Successive differentiation-এর উপর Leibnitz Theorem বিবৃত করো। যদি $y = e^{-x}\cos x$ হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে $y_4 + 4y = 0$।

(ঘ) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ বক্ররেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(ঙ) Vectorial angle 0 থেকে θ পর্যন্ত $r = a(1+\cos\theta)$-এই Cardioide-এর পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(চ) যদি $y = 2\cos x(\sin x - \cos x)$ হয়, দেখাও যে $(y_{10})_0 = 2^{10}$।

বিভাগ - খ

[Geometry]

(Marks : 35)

৩। ***যে-কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২½×২

(ক) কত ডিগ্রি কোণে অক্ষগুলিকে ঘোরালে $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকরণ থেকে xy পদটিকে তাড়ানো যাবে তা নির্ণয় করো।

(খ) $\frac{3}{r} = 2 + 4\cos\theta$ শঙ্কুটির প্রকৃতি নির্ণয় করো এবং ওর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(গ) যে গোলকটির একটি ব্যাসের দুটি প্রান্তবিন্দু (3, 4, –2) এবং (–1, 3, 2) তার সমীকরণটি নির্ণয় করো।

(ঘ) $kx^2 + 8xy + 4y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$ একটি কেন্দ্রবিহীন শঙ্কুচ্ছেদ (Conic) হলে k-এর মান নির্ণয় করো।

৪। ***যে-কোনো পাঁচটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৬×৫

(ক) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16x + 20 = 0$ সমীকরণটিকে তার Canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং Conic-টির প্রকৃতি নির্ণয় করো।

(খ) $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ সরলরেখাটি যদি $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ শঙ্কুছেদটিকে স্পর্শ করে, তবে দেখাও যে $(lA - e)^2 + l^2B^2 = 1$.

(গ) $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$ বিন্দুতে $xy = c^2$ পরাবৃত্তটির অভিলম্ব যদি $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$ বিন্দুগামী হয়, তাহলে দেখাও যে $t_1^3 t_2 + 1 = 0$।

(ঘ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তটির দুটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথটি নির্ণয় করো।

(ঙ) একটি r ব্যাসার্ধের গোলক মূলবিন্দু (0, 0) দিয়ে যায় এবং অক্ষগুলিকে P, Q, R বিন্দুতে স্পর্শ করে। তাহলে এই PQR ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(চ) শঙ্কুটির সমীকরণ নির্ণয় করো, যার শীর্ষবিন্দু (1, 1, 3) এবং বক্ররেখার ভিত্তি $x^2 + 2y^2 = 1, z = 4$।

(ছ) যে Cylinder-এর generator গুলি $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং নির্দেশক বক্ররেখা $x^2+4y^2=9,\ z=1$ তার সমীকরণ লেখো।

(জ) $4x^2-y^2=8z$ —এই Paraboloid-টির সেই সমস্ত generating line-এর সমীকরণ নির্ণয় করো যেগুলি $(-3, 2, 4)$ বিন্দুগামী।

(ঝ) দেখাও যে $3x^2+5y^2+3z^2+2yz+2zx+2xy-4x-8z+5=0$ সমীকরণটি একটি Central Conicoid হয়। এটির কেন্দ্র নির্ণয় করো।

বিভাগ - গ

[Vector Analysis]

(Marks : 20)

৫। ***যে-কোনো চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৪

(ক) $\left[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\right]$-এর মান নির্ণয় করো, যখন $\vec{\alpha}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k},\ \beta=3\hat{i}-\hat{k},\ \vec{\gamma}=2\hat{i}-3\hat{j}$ ।

(খ) প্রমাণ করো যে, $\left[\vec{a}+\vec{b}\ \ \vec{b}+\vec{c}\ \ \vec{c}+\vec{a}\right]=2\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]$ ।

(গ) $2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ লেখো যা $-2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ বিন্দুগামী।

(ঘ) $8\hat{i}-3\hat{j}+a\hat{k}$ এবং $4\hat{i}+b\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরগুলি সমরেখ হলে a এবং b-এর মান নির্ণয় করো।

(ঙ) $\vec{r}=3\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর একটি চলমান বস্তুর কার্য নির্ণয় করো, যেখানে প্রযুক্ত বল হল $\vec{F}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ ।

(চ) একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো যার শীর্ষবিন্দুগুলি হল $\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}, 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ।

(ছ) $\vec{r}=\sin t\,\hat{i}+\cos t\,\hat{j}+t\hat{k}$ হলে $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$-এর মান নির্ণয় করো।

৬। ***যে-কোনো তিনটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৪×৩

(ক) ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দু দুটির সংযোগকারী রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক হবে।

(খ) $(-2, 6, -6)$; $(-3, 10, -9)$ এবং $(-5, 0, -6)$ বিন্দুগামী সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

(গ) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ এবং $\vec{\gamma}$ ভেক্টরগুলি সমতলীয় না হলে দেখাও যে $\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)\times\left(\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\right)=-2\left[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\right]$ ।

(ঘ) $x=2t^2,\ y=t^2-4t,\ z=3t-5$ এই বক্ররেখা বরাবর একটি কণা গতিশীল। তাহলে সময় যখন $t=1$, কণার গতিবেগ ও ত্বরণের components গুলি নির্ণয় করো।

Please Turn Over

(ঙ) $\vec{P}(4,2,1)$ বলটি $A(5,2,4)$ বিন্দুর উপর প্রয়োগ হলে $B(3,-1,3)$ বিন্দুকে কেন্দ্র করে $\vec{P}$ -এর টর্ক নির্ণয় করো এবং Magnitude নির্ণয় করো।

(চ) $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ হলে $\int_1^2 \left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) dt$ -এর মান নির্ণয় করো।

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

[Calculus]

(Marks : 20)

1. Answer ***any four*** questions : 2×4

(a) Find the value of $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$.

(b) Find $\frac{dy}{dx}$, when $x = a\cos^3 t$ and $y = b\sin^3 t$.

(c) Find the values of k in order that $f(x) = (k^2 - 5k + 18)x + x^3 + 6x^2$ is a decreasing function.

(d) If $y = (\sin^{-1}x)^2$, then show that $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$.

(e) Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx$ using the reduction formula, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

(f) Find the arc length of the curve, $x = \cos 3t$, $y = \sin 3t$ over the interval $t \in [0, \pi]$.

(g) Find the area in the first quadrant included between the parabola $x^2 = 36y$, the Y-axis and the line $y = 4$.

2. Answer ***any three*** questions : 4×3

(a) Find the values of a and b in order that $\lim_{x\to 0} \frac{a\sin 2x - b\sin x}{x^3} = 1$.

(b) Find $\frac{dy}{dx}$ when $\tan^{-1}\frac{y}{x} = \log(x^2 + y^2)$.

(c) State Leibnitz Theorem on successive differentiation. If $y = e^{-x}\cos x$, then prove that $y_4 + 4y = 0$.

(d) Find the area enclosed by the curve, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

(e) Find the length of the arc of the cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$ from the vectorial angle 0 to θ.

(f) If $y = 2\cos x(\sin x - \cos x)$, show that $(y_{10})_0 = 2^{10}$.

Group - B

[Geometry]

(Marks : 35)

3. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Find the angle through which the axes be turned to remove the term xy from the equation, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$.

(b) Determine the nature of the conic, $\frac{3}{r} = 2 + 4\cos\theta$ and also find the length of its latus rectum.

(c) Find the equation of the sphere whose extremities of a diameter are (3, 4, –2) and (–1, 3, 2).

(d) Find the value of k for which the equation, $kx^2 + 8xy + 4y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$ represents a conic without any centre.

4. Answer ***any five*** questions : 6×5

(a) Reduce the equation, $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16x + 20 = 0$ to its canonical form and determine the nature of the conic.

(b) If the straight line, $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ touches the conic, $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$, then show that $(lA - e)^2 + l^2B^2 = 1$.

(c) If the normal to the hyperbola, $xy = c^2$ at the point $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$ meet it again at $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$, then show that $t_1^3 t_2 + 1 = 0$.

(d) Find the equation of the locus of the points of intersection of mutually perpendicular tangents to the ellipse, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(e) A sphere of radius r passes through the origin (0, 0) and touches the axes in P, Q, R. Find the locus of the centroid of the triangle PQR.

(f) Find the equation of the cone with vertex (1, 1, 3) and guiding curve $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 4$.

(g) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line, $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ and the guiding curve is the ellipse, $x^2 + 4y^2 = 9$, $z = 1$.

(h) Find the equations of the generating lines of the paraboloid $4x^2-y^2 = 8z$ passing through the point $(-3, 2, 4)$.

(i) Show that the quadric surface given by the equation

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$$

is a central conicoid. Find its centre.

Group - C

[Vector Analysis]

(Marks : 20)

5. Answer ***any four*** questions : 2×4

(a) If $\vec{\alpha}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}, \beta=3\hat{i}-\hat{k}, \vec{\gamma}=2\hat{i}-3\hat{j}$, find $\left[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\right]$.

(b) Prove that $\left[\vec{a}+\vec{b}\ \ \vec{b}+\vec{c}\ \ \vec{c}+\vec{a}\right]=2\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]$.

(c) Find the vector equation of the line passing through the point, $-2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ and parallel to the vector, $2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$.

(d) Find the values of a and b for which the vectors $8\hat{i}-3\hat{j}+a\hat{k}$ and $4\hat{i}+b\hat{j}+4\hat{k}$ are collinear.

(e) Find the work-done in moving an object along a vector $\vec{r}=3\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$ if the applied force is $\vec{F}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$.

(f) Find the area of the triangle having vertices at $\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$, $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ and $-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$.

(g) If $\vec{r}=\sin t\,\hat{i}+\cos t\hat{j}+t\hat{k}$, then find the value of $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$.

6. Answer ***any three*** questions : 4×3

(a) Show by vector method that the line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and half of its length.

(b) Find the vector equation of a plane through the three points $(-2, 6, -6)$; $(-3, 10, -9)$ and $(-5, 0, -6)$.

(c) $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ and $\vec{\gamma}$ are three non-coplanar vectors, then show that $\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)\times\left(\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\right)=-2\left[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\right]$.

(d) A particle moves along the curve $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$. Find the components of velocity and acceleration at time $t = 1$.

(e) Find the torque about the point $B(3, -1, 3)$ of a force $\vec{P}(4, 2, 1)$ passing through the point $A(5, 2, 4)$. Find the magnitude of the torque.

(f) If $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$, then find $\int_1^2 \left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt$.
