2024

MATHEMATICS — MDC

Paper : CC-2

(Basic Algebra)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

Z – পূর্ণসংখ্যার সেট্, R – বাস্তব সংখ্যার সেট্।

বিভাগ - ক

(মান ঃ ২৫)

১। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২½×২

(ক) $\log(1+i)$-কে $a+ib$ রূপে প্রকাশ করো, যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$।

(খ) দেখাও যে, $x^5+x^3-2x^2+x-2=0$, এই সমীকরণটির অন্তত দুটি বীজ (root) অবাস্তব।

(গ) $x^3-ax^2+bx-c=0$, এই সমীকরণের দুটি বীজ সমান এবং বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হলে, a, b, c-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করো।

(ঘ) যদি a, b, c তিনটি বাস্তব ধনাত্মক সংখ্যা এরূপ যে তারা সকলেই সমান নয়, তবে প্রমাণ করো যে, $a^3+b^3+c^3-3abc>0$।

২। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৪

(ক) যদি $\tan\log(x+iy)=a+ib$ হয়, যেখানে $a^2+b^2\neq 1$, তাহলে প্রমাণ করো $\tan\log\left(x^2+y^2\right)=\dfrac{2a}{1-a^2-b^2}$।

(খ) যদি $\sin(\theta+i\varphi)=\tan\beta+i\sec\beta$ হয়, তাহলে প্রমাণ করো $\cos 2\theta\cosh 2\varphi=3$।

(গ) $x^3-px^2+dx-r=0$ সমীকরণটির বীজগুলির গুণোত্তর প্রগতিতে (geometric progression) থাকার শর্ত নিরূপণ করো।

(ঘ) কার্ডন পদ্ধতির (Cardan's Method) সাহায্যে সমাধান করো ঃ $x^3-6x-9=0$।

(ঙ) ফেরারি পদ্ধতির (Ferrari's Method) সাহায্যে সমাধান করো ঃ $x^4+12x-5=0$।

(চ) যদি $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\dfrac{\pi}{7}$ হয়, তাহলে দেখাও $x^7+\dfrac{1}{x^7}=-2$।

(ছ) যদি a, b, c তিনটি এরূপ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা (তারা সকলেই সমান নয়), তাহলে প্রমাণ করো $(a+b+c)(bc+ca+ab)>9abc$।

বিভাগ - খ

(মান ঃ ২৫)

৩। ***যে-কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২১/২×২

(ক) যদি A সেট-এর মধ্যে n সংখ্যক পদ থাকে, তাহলে A সেট-এর উপর কত রকমের সম্পর্ক তৈরি করা যাবে? উত্তরের যথার্থতা প্রমাণ করো।

(খ) দুটি চিত্রণ (Mapping) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এরূপে সংজ্ঞায়িত ঃ

$f(x) = x^2, g(x) = 2x + 3 \ \forall x \in \mathbb{R}$. $f \circ g$ ও $g \circ f$ চিত্রণদ্বয় নিরূপণ করো।

(গ) যদি $a \mid bc$ এবং $gcd(a, b) = 1$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে $a \mid c$।

(ঘ) $1 \le x \le 100$ এই সীমার মধ্যে সমস্ত পূর্ণ সংখ্যা x-এর তালিকা নির্ণয় করো যারা $x \equiv 7 (\text{mod } 17)$—এই সম্পর্ককে সিদ্ধ করে।

৪। ***যে-কোনো চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৪

(ক) Z-সেট-এর উপর একটি সম্পর্ক ρ নিম্নলিখিতভাবে বর্ণিত ঃ

$x \rho y$ হবে যদি এবং শুধুমাত্র যদি $4x + 7y$, 11 দ্বারা বিভাজ্য হয়, যেখানে $x, y \in Z$। ρ সম্পর্কটি Z-সেট-এর উপর equivalence সম্পর্ক হবে কি না যাচাই করো।

(খ) যদি $f: A \to B$ একটি onto mapping (অনটু চিত্রণ) এবং $S \subseteq B$, $T \subseteq B$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে,

$f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$।

(গ) গাণিতিক আরোহণের সাহায্যে প্রমাণ করো যে, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি $\frac{n(n+1)}{2}$।

(ঘ) মৌলিক সংখ্যার উপরে ইউক্লিড-এর উপপাদ্যটি (Euclid's theorem on prime numbers) বিবৃত করো এবং প্রমাণ করো।

(ঙ) নিম্নলিখিত কনগ্রুয়েন্স সিস্টেমের (Congruence system) সমাধান করো ঃ

$x \equiv 2 (\text{mod } 7), x \equiv 5 (\text{mod } 19), x \equiv 4 (\text{mod } 15)$।

(চ) $1! + 2! + 3! + ... + 50!$-এই সংখ্যাটিকে 30 দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ (remainder) থাকে সেটি নিরূপণ করো।

(ছ) যদি p এবং $p^2 + 8$ দুটোই মৌলিক সংখ্যা হয়, তাহলে দেখাও $p = 3$।

বিভাগ - গ

(মান ঃ ২৫)

৫। ***যে-কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২১/২×২

(ক) যদি $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{3}\left(4A - A^2\right) = I_2$। এতদ্দ্বারা A^{-1} নির্ণয় করো।

(খ) 'a'-এর মান নির্ণয় করো যাতে করে $x + 2y + 3z = ax$, $3x + y + 2z = ay$, $2x + 3y + z = az$—এই সমীকরণত্রয়টির একটি শূন্য ছাড়া সমাধান (non-zero solution) থাকে।

(গ) প্রমাণ করো যে, $(2, -3, 1)$, $(3, -1, 5)$, $(1, -4, 3)$ ভেক্টরত্রয় রৈখিকভাবে নির্ভরশীল (linearly dependent)।

(ঘ) $(1, 2, 3)$ ভেক্টরটি'কে, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ ভেক্টরগুলির রৈখিক সংযুক্তিকরণ হিসাবে প্রকাশ করো।

৬। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৪

(ক) λ এবং μ-এর কোন কোন মানের জন্য নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহের (i) একটিমাত্র সমাধান, (ii) অসংখ্য সমাধান এবং (iii) অস্তিত্বশূন্য সমাধান (no solution) থাকবে?

$x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 10$, $x + 2y + \lambda z = \mu$.

(খ) নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্স-টির রো-ইচিলন রূপ (Row-Echelon) নির্ণয় করো ঃ

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

(গ) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে দেখাও $AB = 6I$। এর সাহায্যে বা অন্যভাবে $x + y + 3z = 6$, $2x - 4y = 0$, $x + y - 3z = 0$ সমীকরণসমূহের সমাধান নির্ণয় করো।

(ঘ) যদি $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ এবং $Q = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ দুটি প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স, তবে $P + Q$ ম্যাট্রিক্সটির র‍্যাঙ্ক নির্ণয় করো।

(ঙ) $A_1 = \begin{bmatrix} 1+x \\ x \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2+x \\ x \end{bmatrix}$ ভেক্টরদ্বয় রৈখিকভাবে স্বাধীন কি না যাচাই করো। [$x(\neq 0)$ একটি বাস্তব সংখ্যা।]

(চ) প্রমাণ করো যে, শূন্য ভেক্টর'কে নিয়ে গঠিত যে-কোনো ভেক্টরের সেট রৈখিকভাবে নির্ভরশীল (linearly dependent)।

(ছ) প্রমাণ করো, সেট $P = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হবে যদি এবং শুধুমাত্র যদি P সেট-এর অন্তত একটি ভেক্টর'কে অন্য ভেক্টর'গুলির রৈখিক সংযুক্তি হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Z – Set of integers, R – Set of real numbers.

Group - A

(Marks : 25)

1. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Express $\log(1+i)$ in the form $a+ib$, where $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Show that the equation $x^5+x^3-2x^2+x-2=0$ has at least two non-real roots.

(c) Find the relation among a, b, c for which the two roots of the equation $x^3-ax^2+bx-c=0$ is equal in magnitude but opposite in sign.

(d) For three positive real numbers a, b, c not all equal, show that $a^3+b^3+c^3-3abc>0$.

2. Answer ***any four*** questions : 5×4

(a) If $\tan\log(x+iy)=a+ib$, where $a^2+b^2\neq 1$, prove that $\tan\log\left(x^2+y^2\right)=\dfrac{2a}{1-a^2-b^2}$.

(b) If $\sin(\theta+i\varphi)=\tan\beta+i\sec\beta$, show that $\cos 2\theta\cosh 2\varphi=3$.

(c) Find the condition that the equation $x^3-px^2+dx-r=0$ should have its roots in geometric progression.

(d) Solve by Cardan's method : $x^3-6x-9=0$.

(e) Solve by Ferrari's method : $x^4+12x-5=0$.

(f) If $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\dfrac{\pi}{7}$, then show that $x^7+\dfrac{1}{x^7}=-2$.

(g) For three positive real numbers, a, b, c not all equal, show that $(a+b+c)(bc+ca+ab)>9abc$.

Group - B

(Marks : 25)

3. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) If a set A has n number of elements, how many relations are there on the set A? Justify your answer.

(b) Two mappings $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ and $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are defined by $f(x)=x^2$, $g(x)=2x+3\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Find the mapping $f\circ g$ and $g\circ f$.

(c) If $a\,|\,bc$ and $gcd(a,b)=1$, then prove that $a\,|\,c$.

(d) List all integers x in the range $1\leq x\leq 100$ that satisfy $x\equiv 7 \pmod{17}$.

4. Answer ***any four*** questions : 5×4

(a) A relation ρ is defined on Z by $x\rho y$ holds if and only if $4x + 7y$ is divisible by 11 for $x, y \in Z$. Show whether ρ is an equivalence relation on Z or not.

(b) Let $f: A \to B$ be an onto mapping and $S \subseteq B$, $T \subseteq B$. Prove that $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$.

(c) Use mathematical induction to prove the sum of first n natural number is $\frac{n(n+1)}{2}$.

(d) State and prove Euclid's theorem on prime numbers.

(e) Solve the following system of congruences :

$x \equiv 2 (\text{mod } 7), x \equiv 5 (\text{mod } 19), x \equiv 4 (\text{mod } 15)$.

(f) Find the remainder when $1! + 2! + 3! + ... + 50!$ is divided by 30.

(g) If p and $p^2 + 8$ are both prime numbers, prove that $p = 3$.

Group - C

(Marks : 25)

5. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) If $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, then show that $\frac{1}{3}\left(4A - A^2\right) = I_2$. Hence find A^{-1}.

(b) Find the value of 'a' for which the system of equations $x + 2y + 3z = ax$, $3x + y + 2z = ay$, $2x + 3y + z = az$ has a non-zero solution.

(c) Prove that the three vectors (2, – 3, 1), (3, – 1, 5), (1, – 4, 3) are linearly independent.

(d) Express the vector (1, 2, 3) as linear combination of the vectors (1, 0, 0), (1, 1, 0) and (0, 0, 1).

6. Answer ***any four*** questions : 5×4

(a) Investigate for what values of λ and μ, the following equations $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 10$, $x + 2y + \lambda z = \mu$ have (i) a unique solution, (ii) an infinite number of solutions and (iii) no solution.

(b) Reduce the following matrix to Row-Echelon form :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) If $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 1\\ 3 & 0 & -3\end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$, show that $AB = 6I$. Hence or otherwise solve the equations $x + y + 3z = 6,\ 2x - 4y = 0,\ x + y - 3z = 0$.

(d) If $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 3\end{pmatrix}$ and $Q=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 6 & 12 & 6\\ 5 & 10 & 5\end{pmatrix}$; then find rank of $P + Q$.

(e) Check whether the vectors $A_1=\begin{bmatrix}1+x\\ x\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}2+x\\ x\end{bmatrix}$ are linearly independent, where $x(\neq 0)$ is real.

(f) Prove that a set of vectors containing null vector is linearly dependent.

(g) Prove that a set $P=\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ is linearly dependent if and only if at least one of the vectors in P is a linear combination of the others.